數學 A 考科試題解析

試題編號：1

參考答案：(3)

學科內容：對數律、指數與對數函數

測驗目標：對數運算與根式運算

試題解析：由 $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$ 得知 $\log(2-\sqrt{3})=-\log(2+\sqrt{3})$ 、 $\log(2+\sqrt{3})=-\log(2-\sqrt{3})$ ，故共有 3 個不同實數。

試題編號：2

參考答案：(2)

學科內容：絕對值

測驗目標：數線上距離

試題解析：

1. 不等式 $|x-10|<|x-60|$ 意即 x 至點 10 的距離小於至點 60 的距離，故滿足不等式實數 x 就是數線上在 $35=\dfrac{60+10}{2}$ 左邊的點，亦即 $x<35$ 。
2. 不等式 $|x-60|<|x+10|$ 意即 x 至點 60 的距離小於至點 -10 的距離，故滿足不等式實數 x 就是數線上在 $25=\dfrac{60-10}{2}$ 右邊的點，亦即 $25<x$ 。
3. 故滿足 $|x-10|<|x-60|<|x+10|$ 的實數 x 等同於滿足 $25<x<35$ 的實數 x。這樣的整數共有 9 個。

試題編號：3

參考答案：(1)

學科內容：直線方程式

測驗目標：直線的幾何與代數性質

試題解析：解方程組 $\begin{cases} 8x+5y=14 \\ x+7y=6 \end{cases}$ 可得兩中線交點 $G(\frac{4}{3},\frac{2}{3})$ ，此即 ΔABC 的重心，過頂點 A 的中線即 AG 連線，其斜率為 $\dfrac{3-\frac{2}{3}}{2-\frac{4}{3}}=\dfrac{7}{2}$ 。

試題編號：4

參考答案：(5)

學科內容：平面方程式、空間中的直線方程式

測驗目標：兩平面的夾角

試題解析：1. $(1,0,-1)$ 和 $(1,-1,0)$ 兩點決定的向量為 $(0,1,-1)$，而直線 $\frac{1}{2}x-\frac{13}{7}=y+19=-2z$ 的方向向量為 $(2,1,-\frac{1}{2})$，可得 E 的方程式為 $x-4y-4z=5$。

2. 各選項的平面與 E 夾角餘弦的絕對值分別為 $\frac{1}{\sqrt{33}},\frac{4}{\sqrt{33}},\frac{4}{\sqrt{33}},\frac{3}{\sqrt{66}},\frac{8}{\sqrt{66}}$，因餘弦函數在區間 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 為遞減，餘弦的最大值 $\frac{8}{\sqrt{66}}$ 對應的夾角為最小。

試題編號：5

參考答案：(3)

學科內容：有系統的計數

測驗目標：乘法原理

試題解析：1. 每種壽司的取用方式有 $2^3-1-1=6$ 種可能（扣掉三人都拿或都不拿的情形）。

2. 因為共有 10 種壽司，所以拿取壽司的組合共有 6^{10} 種。

試題編號：6

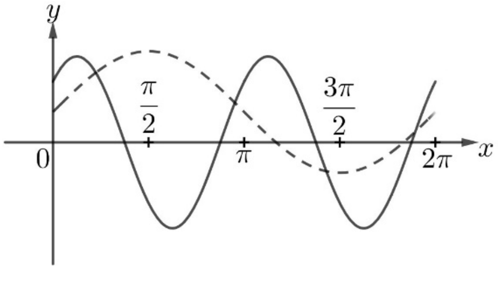
參考答案：(4)

學科內容：三角函數的圖形、正餘弦的疊合

測驗目標：正餘弦函數疊合、正弦函數圖形

試題解析：1. $\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$ 的值在 $-\sqrt{2}$ 與 $\sqrt{2}$ 之間，$0\le x\le 2\pi$ 間共兩個週期；而 $\frac{1}{2}+\sin x$ 的值在 $-\frac{1}{2}$ 與 $\frac{3}{2}$ 之間，$0\le x\le 2\pi$ 間只有 1 個週期。

2.若作略圖（如下圖，其中虛線為 $y=\frac{1}{2}+\sin x$ 的圖形，實線為 $y=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$ 的圖形），可發現兩個圖形恰好交 4 次。



試題編號：7

參考答案：(3)(4)(5)

學科內容：數據分析

測驗目標：圖表解讀

試題解析：選項(1)：甲牧場的牛隻數目並未逐年增加。

選項(2)與選項(3)：甲牧場牛隻數目的中位數明顯大於 10（約為 12 單位），由試題所附圖，可推得標準差小於 3，也可算得算術平均數約為 12.14，甲牧場牛隻數目的標準差約為 1.24。

選項(4)與選項(5)：乙牧場豬隻數目的平均數約為 15.14。甲牧場牛與豬隻數目的相關係數大於乙牧場牛與豬隻數目的相關係數。

試題編號：8

參考答案：(2)(5)

學科內容：一次與二次函數、三次函數的圖形特徵

測驗目標：二次和三次多項式的圖形

試題解析：1. 設 $y=f(x)=b(x-2)^2+3$ ，$b<0$ ；$y=g(x)=a(x-2)^3+c(x-2)-1$ ，$a<0$ 、 $c<0$ 。

2. 由 $y=f(-x)$ 的圖形與 $y=f(x)$ 的圖形互相對 y 軸對稱，可知 $y=f(-x)$ 的圖形依然開口向下。

3. $y=g(-x)$ 的圖形最右方會上升到正無限大，且圖形對稱中心在 $(-2,-1)$ 。

4. 因為 $b\neq 0$，三次函數 $f(x)+g(x)=a(x-2)^3+b(x-2)^2-1+c(x-2)+3$ 圖形對稱中心的 x 坐標不可能是 2。

5. $y=g(x)$ 的圖形最左方會上升到正無限大，且當 $x=2$ 時，$f(2)=3>-1=g(2)$ ，因此由多項式圖形性質，可得 $y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 的圖形在 $x<2$ 時恰有一個交點。

試題編號：9

參考答案：(1)(5)

學科內容：三角比的性質

測驗目標：三角比，正餘弦定理和三角不等式

試題解析：選項(1)：由三角不等式 $a=\overline{BC}>\overline{AC}-\overline{AB}=1$ 。

選項(2)：由餘弦定理，當 $1<a<\sqrt{5}$ 時，ΔABC 亦為鈍角三角形。

選項(3)：由大邊對大角或正弦定理，可知 $\angle B>\angle C$ 。

選項(4)：由正弦定理可知，外接圓半徑必須大於任一邊長的一半。

選項(5)：當 $a=4042/\sin(\pi-\sin^{-1}(\frac{3}{4042})-\sin^{-1}(\frac{2}{4042}))$ 時，外接圓半徑為 2021。或考慮一個斜邊長為 4042，一股長為 3 的直角三角形 ACD，其中 $\angle C$ 為直角，作此三角形的外接圓。在圓弧 AC 上取一點 B，使得 $\overline{AB}=2$ ，$\overline{AC}=3$ ，且三角形 ABC 的外接圓半徑為 2021。故滿足條件的三角形是存在的。

試題編號：10

參考答案：(1)(4)

學科內容：複合事件的古典機率

測驗目標：機率的性質

試題解析：選項(1)：由對稱性可知 1～640 每個號碼的中獎機率皆相同。

選項(2)：大於 640 號的號碼的中獎機率為 0。

選項(3)：中獎號碼百位數字為 1 的共有 100 個號碼，中獎號碼百位數字為 6 的共有 41 個號碼。

選項(4)：抽到第三輪且有人中獎的機率為 $0.36^2 \times 0.64 > 0.3^2 \times 0.6 = \dfrac{54}{1000}$ 。

選項(5)：由於有人中獎的機率為 $1-0.36^3 > 1-0.4^3 = \dfrac{936}{1000}$ 。

試題編號：11

參考答案：(1)(2)(4)

學科內容：平面向量的運算

測驗目標：平面向量的性質

試題解析：選項(1)：若 O, A, D 三點共線，則 $\overline{OA}, \overline{OD}$ 兩向量平行，但由行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 2$ ，

可知 $\overline{OA}, \overline{OB}$ 不平行，故 $2-k=0$ ，亦即 $k=2$ 。

選項(2)：由 $\overline{CD} = \overline{OD} - \overline{OC} = (1-k)(\overline{OB} - \overline{OA}) = (1-k)\overline{AB}$ 。

選項(3)：三角形 OAC 面積為 1。

選項(4)：由三角形皆為同底等高，可知三角形 ABD 的面積恆為 1。

選項(5)：當 $k=2$ 時，三角形 ACD 的面積為 1，但當 $k=3$ 時，三角形 ACD 的面積為 2。

試題編號：12

參考答案：(5)

學科內容：平面方程式、空間向量

測驗目標：空間平面與直線的幾何與代數性質

試題解析：1. 直線 L 的參數式為 $x = \dfrac{1}{2} + t,\ y = \dfrac{1}{3} + 2t,\ z = \dfrac{1}{4} + 3t$ 。直線與立方體的面交點的每個坐標均須介於 0 與 1 之間。

2. 直線 L 與面 $ABCD$ 交於 $(\dfrac{5}{12}, \dfrac{1}{6}, 0)$ ，直線 L 與面 $EFGH$ 交於 $(\dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{6}, 1)$ ；而直線 L 與其他側面皆不相交。

試題編號：13

參考答案：63

學科內容：數列、級數與遞迴關係

測驗目標：等比級數

試題解析：由 $32=2^5$，可知最後一場為第 5 輪比賽，依題述獲勝者共可獲 $1+2+\cdots+2^5=2^6-1=63$ 千元。

試題編號：14

參考答案：$\dfrac{4}{9}$

學科內容：條件機率、貝氏定理

測驗目標：貝氏定理與機率

試題解析：機率為 $\dfrac{0.4\times0.9}{0.4\times0.9+0.6\times0.75}=\dfrac{4}{9}$ 。

試題編號：15

參考答案：$\dfrac{81}{16}$

學科內容：指數、一次與二次函數

測驗目標：指數函數的性質與二次多項式的極值

試題解析：由於 $x^2-3x+3=(x-\dfrac{3}{2})^2+\dfrac{3}{4}$ 之值恆為正，$y=a^{x^2-3x+3}$ 的最小值發生在 $x=\dfrac{3}{2}$ 時，可知 $a^{\frac{3}{4}}=\dfrac{27}{8}=(\dfrac{3}{2})^3$ ，$a^{\frac{1}{4}}=\dfrac{3}{2}$ ，故 $a=(\dfrac{3}{2})^4=\dfrac{81}{16}$ 。

試題編號：16

參考答案：$(5,1)$

學科內容：圓方程式、平面向量

測驗目標：圓的方程式、平面向量

試題解析：由圓 Γ 的方程式，可推得圓心 C 為 $(1,-3)$ ，且 $r^2=8$ 。向量 $CA=(2,-2)-(1,-3)=(1,1)$ ，$\overline{CA}=\sqrt{2}$ ，$\overline{CB}=4\sqrt{2}$ ，可知反演點 B 坐標為 $(1,-3)+4\sqrt{2}\times\dfrac{(1,1)}{\sqrt{2}}=(5,1)$ 。

試題編號：17

參考答案：$\dfrac{-\sqrt{6}}{3}$

學科內容：空間向量的運算、三角比

測驗目標：空間向量、空間中的平面與三角比

試題解析：可令正四面體邊長皆為 1。設 D 點到三角形 ABC 的垂足為 G，由三角形 ABC 為正三角形，知 G 為三角形 ABC 重心，故 $\overline{DG}=\sqrt{1-(\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，可得 $\cos\angle ADG=\frac{\sqrt{6}}{3}$。

因為 D、E 兩點在三角形 ABC 所在平面的異側，且 $\overline{AE}$ 和三角形 ABC 所在平面垂直，故 $\cos\angle DAE=-\cos(\angle ADG)=\dfrac{-\sqrt{6}}{3}$。

試題編號：18

參考答案：(2)

學科內容：直線方程式、矩陣的應用

測驗目標：平面上的線性變換相關性質

試題解析：依定義 T 將點 (x,y) 映射到 $(ax-by,bx+ay)$。由題設得 $(-b,a)$ 在直線 $y=5x+13$ 上，故 $a=-5b+13$。

試題編號：19

參考答案：$a=3,b=2$

學科內容：直線方程式、矩陣的應用

測驗目標：平面上的線性變換相關性質

試題解析：【解法一】

由於線性變換將直線映射到直線上，故可考慮直線 $y=x+1$ 上的兩點 $(0,1),(-1,0)$

經由 T 作用後分別為 $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix},\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -a \\ -b \end{bmatrix}$

因點在直線 $y=5x+13$ 上，可得 $\begin{cases} a+5b=13 \\ 5a-b=13 \end{cases}$

因此得 $a=3,b=2$

【解法二】

直線 $y=x+1$ 上的點的參數式為 $(t,t+1)$，經 T 作用後為 $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t \\ t+1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} at-bt-b \\ bt+at+a \end{bmatrix}$

因點在直線 $y=5x+13$ 上，可得 $bt+at+a=5(at-bt-b)+13$，

即 $(4a-6b)t+13-5b-a=0$。

因對所有實數 t 皆成立，故得 $\begin{cases} 4a-6b=0 \\ a+5b=13 \end{cases}$

因此得 $a=3,b=2$

【解法三】

T 將斜率為 1 的直線轉換成斜率為 5，$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a-b \\ b+a \end{bmatrix}$，

故由 $\dfrac{a+b}{a-b}=5$ 得 $2a=3b$，由 18 題知 $\begin{cases} 2a-3b=0 \\ a+5b=13 \end{cases}$，

故 $\begin{cases} 2a-3b=0 \\ a+5b=13 \end{cases}$，解聯立得 $a=3,b=2$

試題編號：20

參考答案：$\sqrt{13}$

學科內容：直線方程式、矩陣的應用

測驗目標：平面上的線性變換相關性質

試題解析：【解法一】

設 $P=(x_1,y_1),Q=(x_2,y_2)$，

依題意得 $P'=(ax_1-by_1,bx_1+ay_1),Q'=(ax_2-by_2,bx_2+ay_2)$

$$\overline{P'Q'}=\sqrt{(a(x_1-x_2)-b(y_1-y_2))^2+(b(x_1-x_2)+a(y_1-y_2))^2}$$

$$=\sqrt{(a^2+b^2)(x_1-x_2)^2+(a^2+b^2)(y_1-y_2)^2}$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\,\overline{PQ}$$

將第 19 題的 $a=3,b=2$ 代入，得 $\dfrac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}}=\sqrt{13}$。

【解法二】

因$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \sqrt{a^2+b^2}\begin{bmatrix} \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \dfrac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{bmatrix} = \sqrt{a^2+b^2}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$，

其中$\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 。

故T為旋轉θ角合成伸縮$\sqrt{a^2+b^2}$倍。

若O為原點，則$\Delta OP'Q'$與ΔOPQ為相似三角形，且$\Delta OP'Q'$邊長為ΔOPQ的$\sqrt{a^2+b^2}$倍。將第 19 題的$a=3, b=2$代入，得$\dfrac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}} = \sqrt{13}$ 。