

數學 B 考科試題解析

試題編號：1

參考答案：(5)

學科內容：實數

測驗目標：根式與分式的運算

試題解析： $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{6}+1} = \sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2}) - (\sqrt{6}-1) = 3$ 。

試題編號：2

參考答案：(1)

學科內容：矩陣與資料表格

測驗目標：矩陣的乘法

試題解析： $A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = B_{m \times p}$ ，推得 $(m, n) = (4, 3)$ 。

試題編號：3

參考答案：(4)

學科內容：廣義角和極坐標

測驗目標：由 $\sin \theta, \cos \theta$ 值的正負，判斷廣義角終邊所在位置

試題解析：因為 $\sin \theta \cos \theta < 0$ ，所以 $\sin \theta, \cos \theta$ 為一正一負。又因為 $\sin \theta < \cos \theta$ ，所以 $\sin \theta < 0, \cos \theta > 0$ 。因此，標準位置角 θ 是第四象限角。

試題編號：4

參考答案：(2)

學科內容：平面向量

測驗目標：坐標平面上的向量係數積與加減、線性組合

試題解析：設 $\overline{AB} = (-5, -6) + t(8, 4)$ ，其中 $0 \leq t \leq 1$ ，

$$\text{則 } \overrightarrow{OP} = (-5 + 8t, -6 + 4t), \overrightarrow{OQ} = 2\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OC} = 2(-5 + 8t, -6 + 4t) + (0, 4), 0 \leq t \leq 1。$$

由向量的線性組合的平移性質知：這些 Q 點所形成的圖形是線段 \overline{AB} 伸長兩倍後，再平移而得。故該圖形為一線段，且長度是線段 \overline{AB} 長度的兩倍。

試題編號：5

參考答案：(4)

學科內容：三角比的性質

測驗目標：正弦定理，餘弦定理

試題解析：因為 $\frac{a}{\sin A} = 2R$ ，又題幹提及 $\sin A = 2a \sin B$ ，

$$\text{所以 } \sin B = \frac{\sin A}{2a} = \frac{1}{4R} = \frac{\sqrt{3}}{2}，\text{又角 } B \text{ 為銳角，所以 } \angle B = 60^\circ。$$

試題編號：6

參考答案：(3)

學科內容：有系統的計數

測驗目標：利用日常生活情境，測驗基礎排列問題

試題解析：【解法一】鹽巴與糖不能放隔壁的方法有 $3! \times C_2^4 \times 2 = 72$ 種。

【解法二】（全部的排法）－（鹽巴與糖相鄰的排法）= $5! - (4!) \times 2 = 72$ 種。

試題編號：7

參考答案：(2)

學科內容：圓錐曲線

測驗目標：由平面與圓錐截痕，視覺性地認識圓錐曲線，及其在自然中的呈現

試題解析：飲料杯為圓錐的一部份，因水面與某條母線平行，故水面與飲料杯側面的截痕為拋物線。

試題編號：8

參考答案：(4)

學科內容：數列、級數與遞迴關係；矩陣與資料表格

測驗目標：矩陣乘法連結數列

$$\text{試題解析：} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a_n \\ a_n & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n + 3 & 3a_n + b_n \\ 2a_n & 2b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n+1} & c_n \\ d_n & b_{n+1} \end{bmatrix}，$$

選項(1)： $a_{n+1} = a_n + 3 \Rightarrow \langle a_n \rangle$ 為等差數列，公差為 3。

選項(2)： $b_{n+1} = 2b_n \Rightarrow \langle b_n \rangle$ 為等比數列，公比為 2。

選項(3)： $c_n = 3a_n + b_n \Rightarrow \langle c_n \rangle$ 非等比數列。

選項(4)： $d_n = 2a_n \Rightarrow \langle d_n \rangle$ 為等差數列，公差為 6。

選項(5)：若 $a_1 = -1$ ，則 $d_1 = -2$ ；此時 $d_1 < a_1$

試題編號：9

參考答案：(2)(3)

學科內容：圓方程式、直線方程式

測驗目標：利用圓心到直線距離來判斷圓與直線是否相切

試題解析：圓心到直線距離若等於半徑即相切，

由圓方程式 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2$ 知此圓半徑為 $\sqrt{2}$ 。

選項(1)：圓心 $(2, 2)$ 到 $x + y + 2 = 0$ 的距離為 $\frac{|2+2+2|}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} >$ 半徑，未相交。

選項(2)：圓心 $(2, 2)$ 到 $x - y - 2 = 0$ 的距離為 $\frac{|2-2-2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} =$ 半徑，相切。

選項(3)：圓心 $(2, 2)$ 到 $x - y + 2 = 0$ 的距離為 $\frac{|2-2+2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} =$ 半徑，相切。

選項(4)：圓心 $(2, 2)$ 到 $x = 0$ 的距離為 $2 >$ 半徑，未相交。

選項(5)：圓心 $(2, 2)$ 到 $y = 0$ 的距離為 $2 >$ 半徑，未相交。

試題編號：10

參考答案：(3)(4)(5)

學科內容：三次函數的圖形特徵

測驗目標：三次多項式的標準式、對稱性

試題解析：選項(1)：應該是 $f(-1) = 2$ 。

選項(2)：應該是 $(-1, 2)$ 。

選項(3)：因為 x^3 的係數不為 0，所以不會是直線。

選項(4)：因為三次多項式必有實根，所以 $f(x)$ 等於多少都有解。

選項(5)：因 $y = f(x)$ 的圖形之對稱中心為 $(-1, 2)$ ，又直線 $y = -x + 1$ 通過點 $(-1, 2)$ ，故必有交點。

試題編號：11

參考答案：(4)(5)

學科內容：數據分析

測驗目標：測驗中位數、標準差和相關係數

試題解析：選項(1)：五人體重的平均數為 56kg，中位數為 57kg，平均數小於中位數。

選項(2)：五人體脂肪的平均數為 34%，和體脂肪之中位數 34%相等。

選項(3)：五人體脂肪的標準差為

$$\sqrt{\frac{(32-34)^2 + (28-34)^2 + (35-34)^2 + (34-34)^2 + (41-34)^2}{5}} = \sqrt{\frac{90}{5}} = \sqrt{18} > 4。$$

選項(4)：每人減重 2kg 之後，平均體重亦減 2kg，因此標準差不變。

選項(5)：五人的體重和體脂肪相關係數分母為正，分子等於

$$(51-56)(32-34) + (52-56)(28-34) + (57-56)(35-34) + (58-56)(34-34) + (62-56)(41-34) = 77 > 0，因此相關係數為正。$$

試題編號：12

參考答案：(3)(4)(5)

學科內容：三角比、空間概念、空間坐標系

測驗目標：以地球儀為情境，測驗空間坐標與圓

試題解析：選項(1)：設 O' 為 O 點在平面 ABC 上的投影點，圓弧 \widehat{AC} 的圓心為 O' 點，並非 O 點，且圓弧 \widehat{AC} 在小圓上。

選項(2)： $\angle AOB < \angle AO'B = 20^\circ$ 。

選項(3)：圓弧 \widehat{AC} 所在的平面與通過南北極的直線垂直。

選項(4)：因為 A 點所在的緯度為北緯 60 度，所以直線 OA 與通過南北極的直線的夾角為 $90 - 60 = 30$ 度。

選項(5)：通過南極與 A 點的直線與通過南北極的直線夾角為 $\frac{30}{2} = 15$ 度，

即利用圓周角 = $\frac{1}{2}$ 圓心角。

試題編號：13

參考答案：33

學科內容：多項式不等式

測驗目標：已分解之多項式不等式的解區間與整數解個數

試題解析： $(x+20)(x-20)(x^2+x-6) < 0$ ， $(x+20)(x-20)(x-2)(x+3) < 0$

得 $-20 < x < -3$ 或 $2 < x < 20$ ，共有 33 個整數解。

試題編號：14

參考答案：240

學科內容：有系統的計數

測驗目標：利用日常情境，測驗有系統的計數，包括組合。

試題解析：先從六對夫婦中選出四對，共有 $C_4^6 = 15$ 種方法。然後被抽中的每對夫婦可以有先生和太太的兩種選擇，因此組合方式總共有 $C_4^6 \times 2^4 = 15 \times 16 = 240$ 種方法。

試題編號：15

參考答案：-3

學科內容：平面向量的運算

測驗目標：了解內積、向量、單位向量的關係

試題解析：因為長度為 1，所以 $\sqrt{s^2 + \frac{1}{4}} = 1$ ，解得 $s = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，同理 $t = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

再利用夾角為 30° ， $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{t-s}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$ ，所以 $t > s$ ，於是 $s = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ ， $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

因此 $s + t + 4st = -3$ 。

試題編號：16

參考答案： $\frac{5}{16}$

學科內容：複合事件的古典機率

測驗目標：利用日常情境，測驗機率的計算，包括獨立事件的概念

試題解析：6 人中選 3 人出手心，其他人出手背，共有 $C_3^6 = 20$ 種可能。6 個人出手心或者手背的機率都是 $\frac{1}{2}$ ，且各人之間互相獨立，因此所求機率為 $20 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{5}{16}$ 。

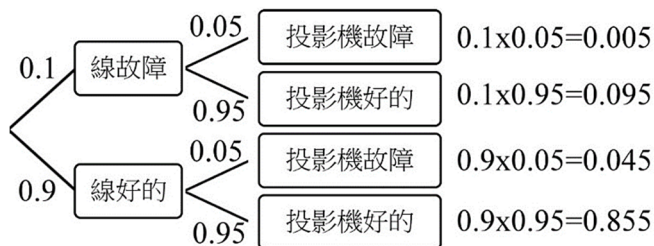
試題編號：17

參考答案： $\frac{9}{29}$

學科內容：不確定性

測驗目標：條件機率、貝氏定理、獨立事件及其基本應用

試題解析：依據題意畫樹狀圖如下：



在連接後無法正常投影的條件下，傳輸線沒有故障的機率為 $\frac{0.9 \times 0.05}{1 - 0.9 \times 0.95} = \frac{0.045}{0.145} = \frac{9}{29}$ 。

試題編號：18

參考答案：(1)

學科內容：指數、按比例成長模型

測驗目標：指數與對數函數的應用

試題解析：將老鼠的體重 $w = 1024 = 2^{10}$ （公克）代入關係式，得基礎耗氧量 m （毫升）為

$$m = \frac{8.46}{1024^{0.4}} = \frac{8.46}{2^{10 \times 0.4}} = \frac{8.46}{16} \approx \frac{1}{2} \text{（毫升）}。$$

故答案為(1)。

試題編號：19

參考答案：(5)

學科內容：指數、按比例成長模型

測驗目標：指數與對數函數的應用

試題解析：代入關係式，得體重 2.6 公斤的狗之基礎耗氧量是體重 83 公斤人的

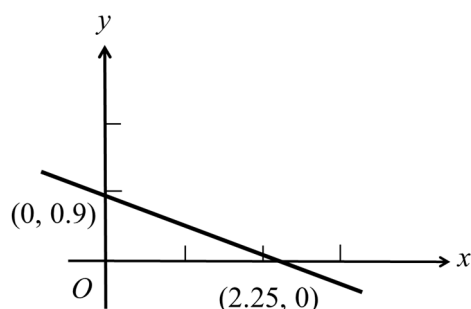
$$\frac{\frac{8.46}{2600^{0.4}}}{\frac{8.46}{83000^{0.4}}} = \frac{83000^{0.4}}{2600^{0.4}} = \left(\frac{83000}{2600} \right)^{0.4} \approx 32^{0.4} = 2^{5 \times 0.4} = 4 \text{（倍）}。$$

故答案為(5)。

試題編號：20

參考答案：1. $y = 0.9 - 0.4x$

2.



學科內容：指數、按比例成長模型

測驗目標：指數與對數函數的應用

試題解析：1. 求關係式

【解法一】利用指數律

以 $w = 10^x$ 和 $m = 10^y$ 代入 w 與 m 的關係式 $m = \frac{8.46}{w^{0.4}}$ ，得 $10^y = \frac{8.46}{10^{0.4x}}$ 。

因為 $8.46 \approx 10^{0.9}$ ， $10^y = \frac{10^{0.9}}{10^{0.4x}} = 10^{0.9-0.4x}$ ，由指數律化簡

得 y 對 x 的函數為 $y = 0.9 - 0.4x$

【解法二】利用對數律

由 $m = \frac{8.46}{w^{0.4}}$ ，兩邊取對數，得 $\log m = \log 8.46 - 0.4 \log w$ 。

由於 $w = 10^x$ ， $m = 10^y$ ，所以 $\log w = x$ ， $\log m = y$ 。

又題目取 $\log 8.46 \approx 0.9$ ，代入得 y 對 x 的函數為 $y = 0.9 - 0.4x$ 。

2. 作圖

依一次函數 $y = 0.9 - 0.4x$ （或直線方程式 $4x + 10y = 9$ ）畫圖得直線圖形如下：

